به نام خدا

مکانیک سیالات

طاهره کاظمی

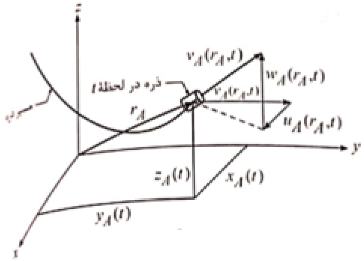
سینماتیک سیالات

میدان سرعت:

اگر u و v و w مولفه‌های سرعت سیال در امتدار محور های x و y و z در مختصات فضایی باشند، در آن صورت سرعت تمام ذرات سیال را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$V = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} \Rightarrow \begin{cases} u = V_x = f(x, y, z, t) = \dfrac{dx}{dt} \\ v = V_y = g(x, y, z, t) = \dfrac{dy}{dt} \\ w = V_z = h(x, y, z, t) = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

به عبارت دیگر می‌توان گفت سرعت سیال از یک نقطه به نقطه دیگر و از یک لحظه به لحظه دیگر می‌تواند متفاوت باشد. پس با مشخص کردن مختصات x و y و z و نیز زمان t و قرار دادن آنها در توابع f و g و h، می‌توانیم مولفه‌های سرعت هر ذره سیال را در موقعیت‌های مکانی معین و زمان مشخص به دست آوریم. به این روش بررسی حرکت سیال، روش میدان سرعت گفته می‌شود.



الف) دیدگاه اولر

در این دیدگاه، نقطه ثابتی در فضا در نظر گرفته می‌شود که با قرار دادن مختصات آن در توابع سرعت، می‌توان سرعت ذرات گذرنده از آن نقطه را در هر لحظه بیان کرد. در واقع بدین طریق در یک نقطه ثابت از فضا، سرعت های رشته پیوسته ای از ذرات سیال که از آن نقطه می‌گذرند را خواهیم داشت. به عنوان مثال برای سرعت ذره گذرنده از نقطه ثابت $A(x_0, y_0, z_0)$ در امتداد محور x ها، در لحظه t داریم:

$$\boldsymbol{u = V_X = f(x_0, y_0, z_0, t)}$$

ب) دیدگاه لاگرانژ

در دیدگاه لاگرانژ برخلاف اولر، تک تک ذرات سیال در مکان‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این دیدگاه روش کار به صورت زیر است:

۱- ابتدا مکان ذره موردنظر در لحظه t=0 مشخص می‌شود

۲- تعیین مختصات این ذره به صورت توابع زمانی و باتوجه به مکان اولیه

۳- مشخص شدن مولفه های سرعت ذره متحرک در هر لحظه

به عنوان مثال: اگر $x(t)$ و $y(t)$ و $z(t)$، نشان دهنده مکان یک ذره مشخص در لحظه t باشند، در آن صورت سرعت این ذره در امتداد محور y ها برابر است با:

$$\boldsymbol{v = V_y = g[x(t), y(t), z(t), t]}$$

طبقه بندی انواع جریان

جریان دائمی (پایدار): اگر خواص سیال و شاخص‌های جریان مثل فشار، جرم مخصوص، سرعت، دما و ... در هر نقطه از سیال نسبت به زمان ثابت باشند، جریان را دائمی یا پایدار می‌گویند.

جریان غیردائمی (ناپایدار): ولی اگر این شاخص های با زمان تغییر کند، جریان غیردائمی یا ناپایدار است.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(P, \rho, V, \cdots) = 0 \Rightarrow & \text{جریان دائمی است.} \\ \frac{\partial}{\partial t}(P \text{ یا } \rho \text{ یا } V \text{ یا } \cdots) \neq 0 \Rightarrow & \text{جریان غیردائمی است.} \end{cases}$$

جریان آب در یک مدار بسته با پمپاژثابت، دائمی و به هنگام پمپاژ متغیر، غیردائمی است.

جریان یکنواخت: جریانی که در آن بردار سرعت در هر لحظه مشخص، در تمام نقاط سیال یکسان باشد.

جریان غیر یکنواخت: اگر سرعت جریان در لحظه‌ای معین، از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر کند، این جریان را غیر یکنواخت می‌نامند.

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial S} = 0 \Rightarrow & \text{جریان یکنواخت است.} \\ \frac{\partial V}{\partial S} \neq 0 \Rightarrow & \text{جریان غیریکنواخت است.} \end{cases}$$

$\frac{\partial V}{\partial s}$ تغییرات سرعت در جهت دلخواه S در لحظه ای معین

جریان مایع در یک لوله مستقیم با سطح مقطع ثابت، یکنواخت است، در حالی که اگر لوله خمیده باشد و یا سطح مقطع متغیر بود جریان غیر یکنواخت است.

جریان تراکم پذیر و تراکم ناپذیر:

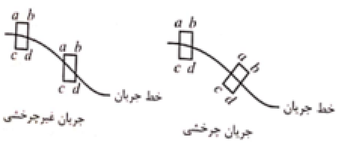
جریان تراکم پذیر: جریانی که جرم مخصوص سیال، تابع مختصات سیال بوده و از نقطه ای به نقطه دیگر تغییر می‌کند.

جریان تراکم ناپذیر: جریانی که جرم مخصوص سیال در تمامی نقاط ثابت بوده و با گذشت زمان تغییر نمی کند.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial (x, y, z)} \neq 0 \Rightarrow & \text{جریان تراکم‌پذیر است.} \\ \frac{\partial \rho}{\partial (x, y, z, t)} = 0 \Rightarrow & \text{جریان تراکم‌ناپذیر است.} \end{cases}$$

مایعات تراکم ناپذیر هستند. هرچند شریط خاصی مانند ضربه قوچ وجود دارد که جریان مایع را تراکم پذیر می‌کند.

جریان چرخشی و غیر چرخشی:



جریان چرخشی: جریانی که در آن ذرات سیال در نواحی از جریان، حول مراکز خود در امتداد خط جریان، دوران کند و در نتیجه سرعت زاویه ای ایجاد کند، جریان چرخشی می گویند.

جریان غیرچرخشی: هنگامی که ذرات سیال هیچ گونه چرخشی نداشته باشند (سرعت زاویه ای برابر صفر باشد)، جریان غیر چرخشی می نامند.

سرعت زاویه ای برای یک میدان سرعت (مانند V) از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\omega = \frac{1}{2}(Curl\, V) = \frac{1}{2}\nabla \times V$$

جریان ایده آل و حقیقی:

جریان ایده آل:اگر جریان، بدون اصطکاک و تراکم ناپذیر باشد، جریان ایده آل می نامند.

جریان حقیقی: اگر جریان هیچ کدام از ویژگی های جریان ایده آل را نداشته باشد، جریان حقیقی است.

جریان سه بعدی، دوبعدی و یک بعدی:

جریان سه بعدی:مشخصات جریان (مانند فشار، سرعت و ...) تابعی از مختصات ذرات سیال یعنی x و y و z ونیز زمان t می‌باشند. که به این جریان سه بعدی می گویند.

جریان دوبعدی: مشاهده شده است که اگر از تغییرات شاخص های جریان در یک راستا صرف نظر شود تغییر محسوسی ایجاد نمی‌شود که به این جریان، جریان دو بعدی می‌گویند.

جریان یک بعدی: اگر از تغییرات شاخص های جریان در دو بعد صرف نظر شود، جریان را یک بعدی می نامند.

جریان یک بعدی که کاربرد بیشتری دارد، تغییر مشخصات جریان تنها در طول خط جریان وجود دارد و در امتداد عمود بر جهت اصلی از تغییرات صرف نظر می‌شود. مضخصات جریان به صورت مقادیر متوسط بین می شوند. جریان لوله، یک جریان یک بعدی است.

جریان آرام و آشفته:

جریان آرام: اگر ذرات سیال مسیرهای منظم و همواری را طی کنند، به طوری که هر لایه سیال به آرامی روی یک لایه مجاور خود بلغزد، جریان آرام می نامند.

جریان آشفته: جریانی که در آن ذرات سیال به علت دارا بودن انرژی جنبشی زیاد، مسیرهای نامنظلی را طی کنند و با برخورد به یکدیگر باعث انتقال انرژی می شوند را جریان آشفته می گویند.

جریان آرام در حالت یک بعدی از قانئن لزجت نیوتن تبعیت می کند. در جریان آرام داریم:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu}\left(\frac{du}{dy}\right)$$

برای جریان آشفته نیز داریم:

$$\boldsymbol{\tau} = \eta\left(\frac{du}{dy}\right)$$

η لزجت گردابی نامیده می شود که خاصیتی از سیال نمی باشد و فقط به آشفتگی جریان و جرم مخصوص سیال بستگی دارد.

نکته: در بسیاری از وضعیت های عملی، لزجت سیال و آشفتگی جریان، هر دو در تولید تنش برشی نقش دارند:

$$\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\mu} + \eta)\left(\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dy}}\right)$$

تعاریف جریان:

خط مسیر: مکان هندسی نقاطی که یک ذره با گذشت زمان طی می کند، خط مسیر آن ذره نامیده می شود.

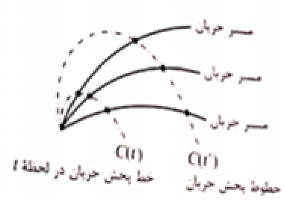
$$\begin{cases} u=\dfrac{dx}{dt} \Rightarrow x=f_1(t) \\ v=\dfrac{dy}{dt} \Rightarrow y=f_2(t) \\ w=\dfrac{dz}{dt} \Rightarrow z=f_3(t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x,y,z)=0}$$

خط جریان: خطی فرضی که در تمام لحظات بر بردار سرعت سیال مماس است.
برای نمایش جریان از خطوط جریان استفاده می شود.

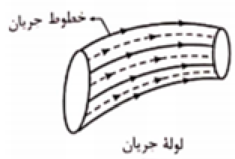
$$\begin{cases} \vec{V} \parallel \vec{dS} \\ \vec{dS}=dx\,\hat{i}+dy\,\hat{j}+dz\,\hat{k} \\ \vec{V}=u\,\hat{i}+v\,\hat{j}+w\,\hat{k} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dfrac{dx}{u}=\dfrac{dy}{v}=\dfrac{dz}{w}}$$

در معادله بالا، ds یک طول دیفرانسیلی از خط جریان می باشد.
معادله بالا از دو معادله مستقل تشکیل شده است و هر خط پیوسته ای در این دو معادله صدق کند، یک خط جریان است.

خط پخش جریان:
اگر تعدادی از ذرات سیال در یک لحظه از یک نقطه ثابت رها شوند، با گذشت زمان مسیرهایی را طی می کند. منحنی که در یک لحظه مشخص شامل همه این ذرات شود، خط پخش جریان در آن لحظه نامیده می شود.



لوله جریان:
خطوط جریانی که از پیرامون یک منحنی بسته در یک لحظه مشخص رسم شوند، تشکیل لوله ای فرضی به نام لوله جریان را می دهند. چون لوله جریان از همه طرف به خطوط جریان محدود است و سرعت هیچ گونه تصویری در جهت عمود بر امتداد جریان ندارد، بنابریان در جدار جانبی لوله، انتقال ذرات از داخل به خارج و بالعکس صورت نمی گیرد و این لوله مانند یک جدار جامد (واقعی) عمل می کند



تذکر: در جریان دائمی امتداد بردار سرعت در هر نقطه همیشه ثابت است و نسبت به زمان تغییر نمی‌کند، بنابراین خطوط جریان در فضا مشخص و بر مسیرهای حرکت ذرات سیال منطبق‌اند. در جریان غیردائمی چون امتداد بردار سرعت در هر نقطه با گذشت زمان تغییر می‌کند، هر خط جریان نیز از لحظه‌ای به لحظهٔ دیگر تغییر خواهد کرد، بنابراین ذره‌ای که در لحظه‌ای معین از یک خط جریان می‌گذرد، در لحظهٔ بعد از خط جریان دیگری عبور خواهد کرد. به‌عبارت دیگر در جریان غیردائمی خطوط جریان متعددی خواهیم داشت که در این صورت انطباق خط مسیر و خط جریان را بی‌معنی جلوه می‌دهد.

شتاب سیال

تغییرات سرعت هر ذره سیال را نسبت به زمان، شتاب آن ذره می نامند. چون سرعت ذره تابعی از مختصات و زمان است، شتاب هر ذره از سیال نیز به مختصات ذره و زمان بستگی خواهد داشت.

با مشتق گیری کلی از بردار سرعت داریم:

$$a = \frac{d}{dt}V(x,y,z,t) = \frac{\partial V}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial V}{\partial y}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial V}{\partial z}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

با توجه به این که $\frac{dx}{dt} = u$ ، $\frac{dy}{dt} = v$ و $\frac{dz}{dt} = w$ می‌باشند، می‌توان نوشت:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial X}.u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}.v + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}.w + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

در رابطه بالا، a شتاب کلی، $\frac{\partial V}{\partial X}.u + \frac{\partial V}{\partial y}.v + \frac{\partial V}{\partial z}.w$ شتاب انتقالی (جابجایی) و $\frac{\partial V}{\partial t}$ شتاب محلی (موضعی) نامیده می شود.

نکته: اگر جریان سیال دائمی باشند، با توجه به اینکه $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ است، شتاب محلی صفر بوده و شتاب وارد بر سیال تنها شتاب انتقالی خواهد بود.

اما در جریان یکنواخت سیال، چون $\frac{\partial \vec{V}}{\partial (x,y,z)} = 0$ می باشد، شتاب انتقالی برابر صفر شده و تنها شتاب محلی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \text{جریان دائمی} \Rightarrow \dfrac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow a = \dfrac{\partial V}{\partial x}u + \dfrac{\partial V}{\partial y}v + \dfrac{\partial V}{\partial z}w \\ \text{جریان یکنواخت} \Rightarrow \dfrac{\partial V}{\partial (x,y,z)} = 0 \Rightarrow a = \dfrac{\partial V}{\partial t} = \dfrac{dV}{dt} \end{cases}$$

نکته: مولفه های شتاب در امتداد محورهای مختصات را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}u + \dfrac{\partial u}{\partial y}v + \dfrac{\partial u}{\partial z}w + \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ a_y = \dfrac{\partial v}{\partial x}u + \dfrac{\partial v}{\partial y}v + \dfrac{\partial v}{\partial z}w + \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ a_z = \dfrac{\partial w}{\partial x}u + \dfrac{\partial w}{\partial y}v + \dfrac{\partial w}{\partial z}w + \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{cases}$$

نکته: در صورتی که از خطوط جریان به عنوان سیستم مختصات استفاده کنیم و محل ذره روی یک خط جریان را با حرف S نشان دهیم در آنصورت داریم:

$$V = V(s,t) \Rightarrow \boxed{a = \frac{\partial V}{\partial s}V + \frac{\partial V}{\partial t}}$$

مثال: درامتداد یک خط جریان مستقیم، سرعت از رابطه $V = 4\sqrt{x^2 + y^2}$ به دست می آید، شتاب سیال در نقطه A(۴و۳) چقدر است؟

چون خط جریان یک خط مستقیم است، بنابراین $S = \sqrt{x^2 + y^2}$ خواهد بود. بنابراین می توان نوشت:

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \begin{cases} s_A = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \\ V = 4s \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial s} = 4 \\ V_A = 4 \times 5 = 20 \ m/s \end{cases} \end{cases}$$

$$a = \frac{\partial V}{\partial s} V + \frac{\partial V}{\partial t} \Rightarrow a_A = 4 \times 20 + 0 = 80 \ m/s^2$$

مثال: میدان سرعت برای یک سیال به صورت $\vec{V} = 3t\hat{i} + xz\hat{j} + ty^2\hat{k}$ می باشد.

شتاب سیال برای این میدان سرعت را از طریق یافتن مولفه های شتاب در امتداد محورهای مختصات تعیین کنید.

$$\vec{V} = 3t\hat{i} + xz\hat{j} + ty^2\hat{k} \qquad \begin{cases} u = 3t \\ v = xz \\ w = ty^2 \end{cases}$$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 + 0 + 0 + 3 = 3$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w + \frac{\partial v}{\partial t} = z(3t) + 0 + x(ty^2) + 0 = 3tz + xty^2$$

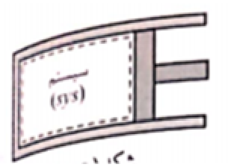
$$a_z = \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w + \frac{\partial w}{\partial t} = 0 + 2ty(xz) + 0 + y^2 = 2xyzt + y^2$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = 3\hat{i} + (3tz + xty^2)\hat{j} + (2tyxz + y^2)\hat{k}$$

مفهوم سیستم، حجم کنترل و سطح کنترل

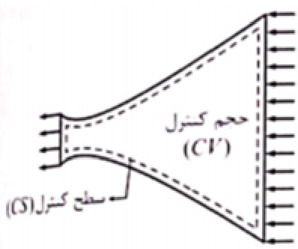
در به کار بردن قوانین جریان سیال، می توان از دو روش جرم مشخص و حجم مشخص به شرح زیر استفاده کرد:

روش جرم مشخص:



در این روش جرم ناشی از سیال را که "جرم مشخص" یا "سیستم" نامیده می شود، در نظر می گیرند و قوانین را با استفاده از متغیرهای لاگرانژ برای آن به کار می برند. یعنی سیستم می تواند تغییر شکل و تغییر مکان بدهد ولی همیشه جرم مشخصی خواهد داشت. بخار موجود در داخل یک سیلندر بعد از بسته شدن دریچه های ورودی و خروجی آن، نمونه ای از یک سیستم است.

روش حجم مشخص:

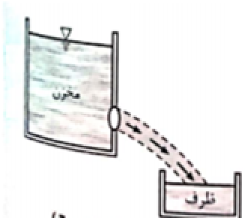


در این روش حجم مشخصی از محیط پیوسته را که به "حجم مشخص" یا "حجم کنترل" موسوم است، در نظر می گیرند و قوانین را با استفاده از متغیرهای اولر برای سیالی که از آن حجم مشخص عبور می کند، به کار می برند. در این حالت مقدار و جنس ماده موجود در حجم مذکور می تواند با گذشت زمان تغییر کند ولی شکل حجم مشخص را "سطح مشخص" یا "سطح کنترل" می نامند. جریان سیال در شیپوره را می توان به صورت یک حجم مشخص بررسی کرد.

نکته: در مکانیک سیالات که با تعداد بیشماری از ذرات سیال مواجه هستیم، روش حجم مشخص ترجیح داده می شود.

دبی جریان:

دبی جریان عبوری از یک مقطع عبارتست از مقدار سیالی که در واحد زمان از آن عبور می کند. مقدار سیال را می توان به صورت حجم، وزن یا جرم آن در نظر گرفت که به ترتیب دبی حجمی، دبی وزنی یا دبی جرمی می نامند.



مثال: در یک مخزن بزرگ مطابق شکل روبرو، روزنه ای تعبیه شده است که آب را با سرعت ثابت تخلیه می کند به طوری که آب تخلیه شده، ظرفی به حجم ۱۲۰۰ لیتر را در مدت یک دقیقه پر می کند. دبی حجمی، دبی وزنی و دبی جرمی از مخزن را به دست آورید.

مقدار آبی که در واحد زمان در ظرف جمع می شود، همان آبی است که در واحد زمان از روزنه عبور کرده است (خارج شده است). بنابراین داریم:

$$\text{دبی حجمی} = \frac{\text{حجم آب موجود در ظرف}}{\text{زمان}} = \frac{1200}{60} = 20\ lit = 0.02 m^3/s$$

$$\text{دبی وزنی} = \frac{\text{وزن آب موجود در ظرف}}{\text{زمان}} = \frac{10000 \times 1200 \times 10^{-3}}{60} = 200\ N/s$$

$$\text{دبی جرمی} = \frac{\text{جرم آب موجود در ظرف}}{\text{زمان}} = \frac{1000 \times 1200 \times 10^{-3}}{60} = 20\ kg/s$$

نکته: اگر دبی حجمی را با Q ، دبی وزنی را با G و دبی جرمی را با $\dot{m}$ نشان دهیم، در آن صورت خواهیم داشت:

$$G = \gamma Q = g\dot{m}$$

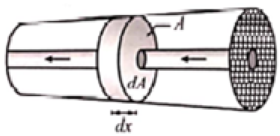
نکته: از آنجایی که در اغلب کارهای مهندسی از دبی حجمی استفاده می شود، هرگاه کلمه دبی به تنهایی به کار برده شود، منظور دبی حجمی است. واحدهای متداول دبی به شرح زیر است:

$$m^3/s \xrightarrow{\times 1000} lit/s \xrightarrow{\times 1000} cm^3/s$$

مثال: اگر در جریان آبی، دبی عبوری از یک مقطع برابر ۲۰ lit/s باشد، دبی وزنی و دبی جرمی آب عبوری از آن مقطع را به دست آورید.

$$G = \gamma Q = 10^4(20 \times 10^{-3}) = 200\ N/s$$

$$\dot{m} = \frac{\gamma Q}{g} = \frac{10^4}{10}(20 \times 10^{-3}) = 20\ kg/s$$



رابطه دبی با سرعت جریان:

در جریان یک سیال، لوله جریانی با سطح مقطع دیفرانسیلی dA را در نظر می گیریم.

به علت کوچک بودن مقطع dA می توان سرعت را برابر u فرض کرد.

در این حالت داریم:

حجم

$$\frac{d\forall}{dt} = dQ \Rightarrow dQ = \frac{dx \times dA}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right) \times dA = u\,dA$$

و دبی کل برای تمام سطح مقطع A برابر می شود با : $Q = \int_A u\,dA$

برای سرعت متوسط داریم: $V = \frac{\int_A u dA}{A}$

برای دبی جریان عبوری داریم: $Q = VA$

نکته: از آنجا که انتگرال $\int_A udA$ نشان دهنده حجم قرار گرفته در زیر پروفیل سرعت است، می توان نتیجه گرفت که دبی عبوری از یک مقطع برابر حجم پروفیل توزیع سرعت می باشد.

مثال: توزیع سرعت برای جریان آرام در یک لوله طویل، به صورت زیر داده شده است:

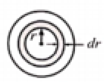
$$u = u_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

که در رابط فوق، شعاع لوله، u_{max} مقدار سرعت در محور لوله و r فاصله از محور لوله است. دبی جران و سرعت متوسط مقطع را به دست آورید.

المان سطح dA را مطابق شکل به صورت یک حلقه به شعاع r و ضخامت dr در نظر گرفته و می نویسیم:

$$dA = 2\pi r dr$$

پروفیل سرعت



مقطع جریان

$$Q = \int_A u\,dA = \int_0^R \left[u_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right] \times (2\pi r\,dr) = \frac{2\pi u_{max}}{R^2} \int_0^R (R^2 r - r^3)\,dr$$

$$= \frac{2\pi u_{max}}{R^2} \times \left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{1}{2} u_{max}\,\pi R^2$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{1}{2} u_{max}\,\pi R^2}{\pi R^2} = \frac{1}{2} u_{max}$$

چند نکته در رابطه با مثال قبل:

۱- پروفیل توزیع سرعت در جریان آرام، یک سهمیگون است و حجم آن نصف حجم استوانه محیطی اش می باشد. بنابراین میتوانیم بنویسیم:

$Q =$ حجم پروفیل سرعت $=$ حجم سهمیگون $= \frac{۱}{۲}(\pi R^{۲} u_{max})$

۲- در جریان آرام (ورقه ای) در لوله های مدور، همواره سرعت متوسط مقطع نصف سرعت ماکزیمم است.

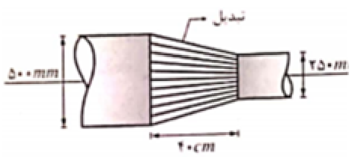
۳- توزیع سرعت در جریان آشفته (متلاطم) در یک لوله مدور، به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{u = u_{max}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{m}}$$

m در رابطه قبل پارامتری است که تابع عدد رینولدز جریان بوده و بین $\frac{1}{9}$ تا $\frac{1}{5}$ تغییر می کند. از آنجایی که برای توان m معمولا از عدد $\frac{1}{7}$ استفاده می شود. این رابطه به قانون یک هفتم پرانتل معروف شده است.

۴- مشابه جریان آرام می توان نشان داد که به هنگام جریان آشفته در یک لوله مدور، سرعت متوسط مقطع برابر است با:

$$V = \frac{۲u_{max}}{(m+۱)(m+۲)}$$



مثال: طول تبدیل نشان داده شده، که بین دو لوله به قطرهای ۵۰۰ و ۲۵۰ میی متر قرار گرفه است، برابر ۴۰ سانتی متر است.اگر دبی جریان ۶۰۰ lit/s باشد. با فرض یک بعدی بودن جریان شتاب، سیال را در فاصله ۱۶۰ میلی متری از آغاز تبدیل محاسبه کنید. $(\boldsymbol{\pi = 3})$

اگر سرعت سیال را با u نشان دهیم، شتاب برابر است با:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}$$

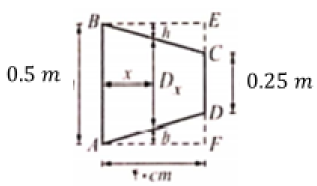
چون دبی در طول زمان ثابت است، پس سرعت نیز در طول زمان ثابت خواهد بود یعنی داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

و همچنین با توجه به یک بعدی بودن (v=w=0) جریان داریم:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x}u = \frac{du}{dx}.u$$

سپس با ترسیم شکل تبدیل مورد نظر خواهیم داشت:



$$\begin{cases} B\hat{C}E : \dfrac{h}{EC} = \dfrac{x}{۰/۴} \\ EC = \dfrac{۰/۵ - ۰/۲۵}{۲} = ۰/۱۲۵\ m \end{cases}$$

$$\Rightarrow h=\frac{۵}{۱۶}x \Rightarrow D_x=(۰/۵-۲h)=\left(۰/۵-\frac{۵}{۸}x\right) \Rightarrow A_x=\frac{\pi}{۴}D_x=\frac{\pi}{۴}\left(۰/۵-\frac{۵}{۸}x\right)^۲$$

$Q=V_xA_x$

$$V_x=u=\frac{Q}{A_x}=\frac{۶۰۰\times۱۰^{-۳}}{\frac{\pi}{۴}\left(۰/۵-\frac{۵}{۸}x\right)^۲}=\frac{۲۵۶}{۵(۴-۵x)^۲}$$

$$u\,(x=۰/۱۶)=\frac{۲۵۶}{۵(۴-۵\times۰/۱۶)^۲}=۵\ m/s$$

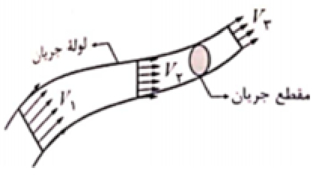
$$\frac{du}{dx}=\frac{۲۵۶۰}{۵(۴-۵x)^۳} \Rightarrow \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=۰/۱۶}=\frac{۲۵۶۰}{۵(۴-۵\times۰/۱۶)^۳}=۱۵/۶۲۵\ (s^{-1})$$

و در نهایت داریم:

$$a_x=\frac{du}{dx}\cdot u=۱۵/۶۲۵\times۵=۷۸/۱۲۵\ m/s^۲$$

معادله پیوستگی:

معادله پیوستگی جریان در حالت یک بعدی:



یک لوله جریان را طوری در نظر می گیریم که جریان گذرنده از آن دائمی باشد. با فرض یک بعدی بودن جریان چنین نتیجه می شود که شاخص های جریان در یک مقطع مقدار ثابتی دارند. ولی بایستی توجه کرد که مقدار این شاخص ها می تواند از مقطعی به مقطع دیگر تغییر کند. هدف ما یافتن تغییرات سرعت (به عنوان یکی از مشخصات جریان) با توجه به تغییرات مساحت در مقاطع مختلف است.

اساس تحلیل ما بر اصل بقای جرم استوار است. به موجب این اصل ماده خود به خود تولید یا نابودنمی شود، بنابراین در یک جریان دائمی انتظار داریم مقدار جرم عبورکننده از یک مقطع در یک بازه زمانی مشخص، دقیقا برابر مقدار جرمی باشد که از سایر مقاطع در همان زمان عبور می کند. از این رو می توان نتیجه گرفت که مقدار جرم در واحد زمان، یعنی دبی جرمی عبورکننده از کلیه مقاطع یکسان خواهد بود. بیان بالا مفهوم پیوستگی جریان است که به صورت زیر نوشته می شود:

$$\dot{m} = \text{const.} \longrightarrow \rho Q = \text{const.} \longrightarrow \rho A V = \text{const.}$$

در رابطه بالا V و A به تریتب سرعت متوسط و مساحت مقطع مورد نیاز است.

یعنی برای مقاطع مختلف داریم:

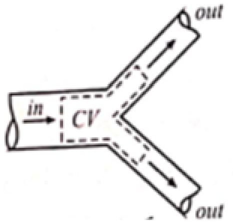
$$\rho_۱A_۱V_۱=\rho_۲A_۲V_۲=\rho_۳A_۳V_۳=\cdots=const$$

برای جریان تراکم ناپذیر داریم:

$$\boldsymbol{Q=const}$$

$$\boldsymbol{A_1V_1=A_2V_2=A_3V_3=\cdots=const}$$

نکته: هنگامی که مطابق شکل زیر در مقطعی از جریان دائمی بیش از یک ورودی یا خروجی داشته باشیم (انشعاب)، با در نظر گرفتن یک حجم کنترل و استفاده از اصل بقای جرم چنین نتیجه می شود که مقدار جرم وارد شده به حجم کنترل در یک زمان مشخص دقیقا برابر مقدار جرمی است که در همان زمان از حجم کنترل خارج می شود، با در نظر گرفتن زمان واحد برای جرم مورد نظر داریم:



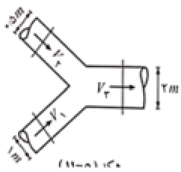
$$\sum \dot{m}_{(in)} = \sum \dot{m}_{(out)}$$

برای سیال تراکم پذیر ($\rho = const$) داریم:

$$\rho = \text{const} \longrightarrow \sum Q_{(in)} = \sum Q_{(out)}$$

مثال: در یک لوله یکی به قطر ۰.۵ متر و دیگری به قطر ۱ متر مطابق شکل به یک لوله بزرگتر به قطر ۲ متر متصل شده اند. درون سیستم لوله‌ها، نفت با دانسیته ۸۰۰ kg/m3 جریان دارد. اگر دبی جرمی در بزرگترین مقطع برابر ۶۰۰۰ kg/s و سرعت دو مقطع کچکتر با هم برابر باشند، سرعت جریان در هریک از لوله ها را به دست آورید.

($\pi = 3$)

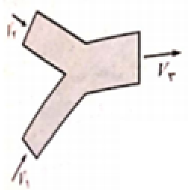


نفت یک مایع تراکم ناپذیر است که جرم مخصوص آن در تمام لوله ها برابر مقدار ثابت ۸۰۰ kg/m3 است.

بنابراین جریان تراکم ناپذیر بوده و معادله پیوستگی را به شکل زیر داریم:

$$\sum Q_{(in)} = \sum Q_{(out)} \Rightarrow A_1V_1 + A_2V_2 = A_3V_3 \Rightarrow d_1^2V_1 + d_2^2V_2 = d_3^2V_3$$

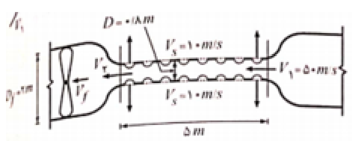
$$\dot{m} = \rho AV \longrightarrow 6000 = 800\left[\pi \times \frac{2^2}{4}\right]V_3 \longrightarrow V_3 = 2.5\ m/s$$



حال با توجه به یکسان بودن V_1 و V_2 خواهیم داشت:

$$V_1 \times (۰/۵^۲ + ۱^۲) = ۲^۲ \times ۲/۵ \Rightarrow V_1 = V_2 = ۸\ m/s$$

مثال: شکل مقابل یک تونل باد را نشان می دهد که در دیواره آن سوراخ‌های ریزی جهت مکش هوا تعبیه شده است. طول دیواره تونل ۵ متر و دارای ۸۰۰ سوراخ در هر مترمربع است. قطر سوراخ ها ۱۰ میلی متر و ۱۰ سرعت مکش هوا از آن ها $V_S = 10\ m/s$ است. اگر سرعت هوا در مقطع آزمایش (ورودی دیواره) برابر $V_1 = 50\ m/s$ باشد، با فرض تراکم ناپذیری هوای عبوری از تونل، الف) دبی حجمی کل جریان مکیده شده از دیواره را تعیین کنید. ب) سرعت هوا در خروجی دیواره (V_2) را به دست آورید. و ج) سرعت هوا را در مقطعی که سبب چرخش پروانه می‌شود (V_f) را محاسبه کنید.



($\pi = 3$)

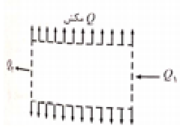
الف)

$$N = n \times \pi DL = (۸۰۰)(\pi \times ۰/۸ \times ۵) = ۹۶۰۰$$: تعداد کل سوراخ‌ها

$$q = A_S\ V_S = \left[\frac{\pi \times ۰/۰۱^۲}{۴}\right] \times ۱۰ = ۷۵ \times ۱۰^{-۵}\ m^۳/s \longrightarrow Q = N.q = ۹۶۰۰ \times ۷۵ \times ۱۰^{-۵} = ۷/۲\ m^۳/s$$

(دبی هر سوراخ: q — دبی کل مکش: Q)

ب) اگر دیواره را به عنوان حجم کنترل مشخص نماییم و معادله پیوستگی را برای جریان های ورودی و خروجی آن بنویسیم، در آن صورت خواهیم داشت:



$$\sum Q_{(in)} = \sum Q_{(out)} \Rightarrow Q_۱ = Q_۲ + Q_{\text{مکش}}$$

$$\left[\frac{\pi \times ۰/۸^۲}{۴}\right] \times ۵۰ = \left[\frac{\pi \times ۰/۸^۲}{۴}\right] \times V_۲ + ۷/۲ \Rightarrow V_۲ = ۳۵\ m/s$$

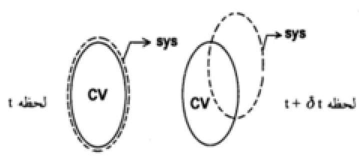
ج)

$$Q_f = Q_۲ \Rightarrow \frac{V_f}{V_۲} = \left[\frac{D_۲}{D_f}\right]^۲ \Rightarrow V_f = ۳۵ \times \left[\frac{۰/۸}{۲}\right]^۲ = ۵/۶\ m/s$$

معادله پیوستگی جریان در حالت کلی:

معادله پیوستگی جریان در حالت کلی (سه بعدی)، یک رابطه ریاضی است که براساس اصل بقای جرم و به کارگیری این اصل در معادله انتقال رینولدز نوشته می شود.

معادله انتقال رینولدز: خاصیتی از سیال مانند جرم، انرژی یا مومنتم (اندازه حرکت) را در نظر می‌گیریم و مقدار این خاصیت در داخل سیستم در لحظه t را با N نشان می‌دهیم. مقدار این خاصیت بر واحد جرم سیال را نیز با η نشان می‌دهیم. حال فرض می‌کنیم که مطابق شکل زیر در لحظه t، سیستم (sys) در داخل حجم کنترل (cv) قرار دارد. بدیهی است که در لحظه t+δt دیگر سیستم منطبق بر حجم کنترل نیست.



طبق معادله انتقال رینولدز، نرخ افزایش N در داخل سیستم برابر است با نرخ افزایش N در داخل حجم کنترل بعلاوه نرخ خالص خروج N از سطح کنترل. بیان فوق بصورت ریاضی، به شکل زیر نمایش داده می‌شود: (سرعت = V و

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \eta \rho d\forall + \int_{cs} \eta \rho V \cdot dA} \qquad (\forall = \text{حجم و } V = \text{سرعت})$$

اصل بقای جرم و بکارگیری آن در معادله انتقال رینولدز: اصل بقای جرم بیان می‌کند که جرم یک سیستم در طی زمان تغییر نمی‌کند. بنابراین اصل بقای جرم برای سیستم به صورت زیر بیان می‌شود:

dm/dt=0

که در آن m جرم کل سیستم است. حال در معادله انتقال رینولدز به جای N، جرم سیستم یعنی m را قرار می‌دهیم. بدیهی است که در این حالت η، جرم واحد جرم، یعنی یک، خواهد شد.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho\, d\forall+\int_{cs}\rho V\cdot dA=0}$$

معادلات پیوستگی دیفرانسیلی:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)=0$$

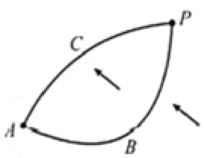
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

تابع جریان:

یک کمیت عددی که بیان کننده رابطه خطوط جریان و پیوستگی است و تابعی از مختصات ذرات سیال و زمان است.

توابعی که در اینجا به آن اشاره می شود دارای محدودیت تراکم ناپذیری و دوبعدی بودن است.

مفهوم تابع جریان:



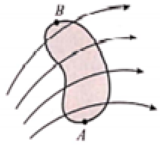
در شکل مقابل، یک جریان دوبعدی را در صفحه ای دلخواه، در نظر میگیریم.حال نقطه ثابت A و نقطه متحرک P را در این جریان انتخاب کرده و خطوط دلخواه ACP و ABP را رسم می کنیم. عرض جریان را عمود بر صفحه کاغذ، واحد در نظر گرفته و با توجه به تراکم ناپذیری سیال، معاله پیوستگی جریان را به صورت زیر می نویسیم:

$$q_{ACP}=q_{ABP}=q_{AP}$$

رابطه پیوستگی بیانگر این است که دبی عبوری در واحد عرض برای هر خطی که این دو نقطه را به هم وصل کند تابع موقعیت نقطه متحرک P خواهد بود و به مسیر این خطوط بستگی ندارد. این تابع، تابع جریان نامیده می شود و آن را با Ψ نمایش می دهند.

طبق قرارداد اگر ناظری که از A به P نگاه می کند، شاهد جریانی از راست به چپ باشد، در آن صورت دبی عبوری مثبت خواهد بود.

نکته: اگر دو نقطه A و B هردو متحرک بوده و مطابق شکل در یک صفحه جریان تراکم ناپذیر انتخاب شوند، در آن صورت دبی عبوری از کلیه مسیرهای دلخواهی که دو نقطه A و B را به هم وصل می کنند (و دارای عرض واحد عمود بر صفحه کاغذ می باشند)، از رابطه زیر قابل محاسبه است:

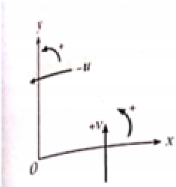


$$\boxed{q_{A-B} = \Psi_B - \Psi_A}$$

نکته: برای یک جریان تراکم ناپذیر دوبعدی داریم:

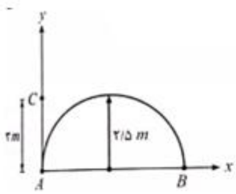
$\Psi = f(x, y, t)$ تابع جریان

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = +v & (۱) \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = -u & (۲) \end{cases}$$



یعنی مشتق تابع جریان نسبت به هر مسیر، مولفه سرعت در راستای عمود بر آن مسیر (با گردش در خلاف جهت عقربه های ساعت) را تعیین می کند.

مثال: تابع جریان Ψ به صورت $\Psi = x^2 + 2xy + 4t^2y$ داده شده است. در لحظه t=3 s دبی گذرنده از مسیرهای زیر در واحدعرض را که در شکل مشخص شده است، به دست آورید. الف) نیم دایره AB (q_{AB}) ب) خط AC واقع بر محور y ها (q_{AC}) ج) خطی که دو نقطه B و C را به هم وصل می کند (q_{BC})



الف)

$$q_{A-B} = \Psi_B - \Psi_A = (۵^۲ + ۰ + ۰) - (۰) = ۲۵\ m^۲/s$$

ب)

$$q_{A-C} = \Psi_C - \Psi_A = (۰ + ۰ + ۴ \times ۳^۲ \times ۳) - (۰) = ۱۰۸\ m^۲/s$$

ج)

$$q_{B-C} = \Psi_C - \Psi_B = q_{A-C} - q_{A-B} = ۱۰۸ - ۲۵ = ۸۳\ m^۲/s$$

تمرین۱- میدان سرعت یک جریان دو بعدی به صورت $\vec{V} = \frac{\pi}{x}\hat{\imath} + (y^2 + 1)\hat{\jmath}$ می باشد.معادله خط جریان گذرنده از نقطه $(\pi,1)$ را به دست آورید.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dx}{\left(\frac{\pi}{x}\right)} = \frac{dy}{(1+y^2)} \Rightarrow \frac{x^2}{2\pi} = Arctan\, y + c_1$$

با قرار دادن مختصات نقطه در معادله بالا داریم:

$$\frac{\pi^2}{2\pi} = Arctan(1) + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{\pi}{4}$$

و در نتیجه:

$$\frac{x^2}{2\pi} = Arctan\, y + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2}{\pi}x^2 - 4Arctan\, y = \pi$$

تمرین۲- میدان سرعت برای جریان یک سیال به صورت زیر است: (u و v برحسب m/s هستند.)

$$\begin{cases} u = 6xt + 15 \\ V = 3xy^2 + t^2 + y \end{cases}$$

بردار شتاب این سیال در نقطه (۲و۱) در زمان t=1 را به دست آورید.

$$\begin{cases} \vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\text{v} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}w + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \\ \vec{V} = (6xt + 15)\hat{\imath} + (3xy^2 + t^2 + y)\hat{\jmath} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (6t\,\hat{i} + 3y^2\hat{j})(6xt + 15) + (6xy\hat{j} + \hat{j})(3xy^2 + t^2 + y) + (6x\,\hat{i} + 2t\hat{j})$$

$$\Rightarrow a_{(2,1)}\Big|_{t=1} = (6\hat{i} + 3\hat{j})(6\times2\times1 + 15) + (12\hat{j} + \hat{j})(3\times2\times1^2 + 1^2 + 1) + (12\hat{i} + 2\hat{j})$$

$$\Rightarrow \vec{a} = 174\hat{i} + 187\hat{j}$$

تمرین۳- در یک جریان دوبعدی، دائمی و تراکم ناپذیر، میدان سرعت مطابق $\vec{V}(x,y) = x^2y\hat{\imath} + mx(1+y^2)\hat{\jmath}$ می باشد. اندازه شتاب انتقالی در نقطه (۲و۱) چقدر است؟

ابتدا ضریب را با توجه به تراکم ناپذیر بودن جریان، بر اساس رابطه پیوستگی جریان به دست می آوریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=۰ \Rightarrow ۲xy+۲mxy=۰ \qquad m=-1 \qquad V(x,y)=x^۲y\,\hat{i}-x(۱+y^۲)\hat{j}$$

با توجه به دائمی بودن جریان، شتاب موضعی برابر صفر خواهد بود و تمام شتاب، انتقالی است. حال مقدار شتاب انتقالی را محاسبه می کنیم:

$$\vec{a}_{\text{انتقالی}} = a_{x\,\text{انتقالی}}\hat{\imath} + a_{y\,\text{انتقالی}}\hat{\jmath}$$

$$a_{x\,\text{انتقالی}} = \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v = (2xy)(x^2y) + \left[x^2\left(-x(1+y^2)\right)\right]$$

$$= 2x^3y^2 - x^3(1+y^2)_{(1,2)} = 2\times1^3\times2^2 - 1^3\times(1+2^2) = 3\ m/s^2$$

$$a_{y\,\text{انتقالی}} = \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v = -(1+y^2)\times x^2y + \left[(-2xy)\times\left(-x(1+y^2)\right)\right]$$

$$= -x^2y(1+y^2) + 2x^2y(1+y^2)]_{(1,2)} = -1\text{^}2\ \times 2\times(1+2^2) + 2\times1^2\times2\times(1+2^2) = 10\ m/s^2$$

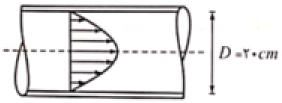
$$\left|\vec{a}_{\text{انتقالی}}\right| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{3^2+10^2} = \sqrt{109}\ m/s^2$$

تمرین۴- وقتی در لوله ای به قطر $10\ cm$ با دبی $31.4\ lit/s$ جریان دارد. اگر جرم مخصوص روغن برابر $800\ kg/m^3$ باشد، در آن صورت سرعت متوسط، دبی جرمی و دبی وزنی جریان را محاسبه کنید. ($g = 10\ m/s$)

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{۳۱/۴\times۱۰^{-۳}}{\pi\times۰/۰۵^۲}=۴\ m/s$$

$$\dot{m}=\rho Q=۸۰۰\times۳۱/۴\times۱۰^{-۳}=۲۵\ kg/s$$

$$G=\gamma Q=۸۰۰\times۱۰\times۳۱/۴\times۱۰^{-۳}=۲۵۰\ N/s\ =۰/۲۵\ kN/s$$



تمرین۵- سیالی با شدت $600kgr/cm^3$ در لوله ای به قطر 20 cm در جریان است. اگر بدانیم توزیع سرعت سیال در لوله به صورت سهمیگون و مانند شکل است، در آن صورت سرعت ماکزیمم جریان را به دست آورید. (دانسیته سیال $0.8\ gr/cm^3$ و $\pi = 3$)

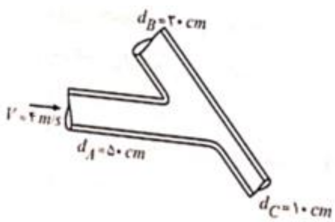
ابتدا دبی حجمی جریان را به دست می آوریم:

$$\gamma Q = g\dot{m} \longrightarrow Q = \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{600}{0.8 \times 10^3} = 0.75\ m^3/s$$

تبدیل $gr/cm^۳$ به $kg/m^۳$

از طرفی می دانیم دبی عبوری از یک مقطع، برابر حجم پروفیل سرعت در آن مقطع است. همچنین حجم یک سهمیگون نصف حجم استوانه محیطی اش است. بنابراین داریم:

$$Q = \text{حجم پروفیل سرعت} = \frac{۱}{۲} A \times u_{max} \Rightarrow u_{max} = \frac{۲Q}{A} = \frac{۲ \times ۰/۷۵}{\frac{\pi \times ۰/۲^۲}{۴}} = ۵۰\ m/s$$



تمرین۶- روغن به جرم مخصوص ۸۰۰ مطابق شکل از لوله A به قطر ۵۰ سانتی متر وارد سیستم شده و از لوله های B و C به قطرهای ۳۰ و ۱۰ سانتی مترخارج می شود. اگر سرعت جریان در لوله C سه برابر سرعت در لوله B باشد، سرعت در لوله C چقدر است؟

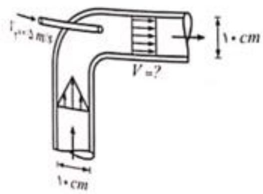
روغن یک مایع تراکم ناپذیر با دانسیته ثابت است. بنابراین می توان جریان را تراکم ناپذیر در نظر گرفت.

$$\sum Q_{(in)} = \sum Q_{(out)} \longrightarrow (V_A)\left(\frac{\pi d_A^۲}{۴}\right) = (V_B)\left(\frac{\pi d_B^۲}{۴}\right) + (V_C)\left(\frac{\pi d_C^۲}{۴}\right)$$

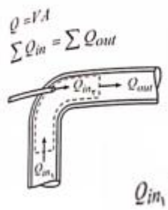
$$\Rightarrow V_A d_A^۲ = V_B d_B^۲ + V_C d_C^۲ \quad \text{و} \quad V_B = \frac{۱}{۳} V_C$$

$$\Rightarrow ۴ \times ۰/۵^۲ = \frac{۱}{۳} V_C \times ۰/۳^۲ + V_C \times ۰/۱^۲ \Rightarrow V_C = ۲۵\ m/s$$

تمرین۷- توزیع سرعت در لوله شکل مقابل و در قسمت قائم خم به صورت خطی از جداره تا مرکز لوله تغییر می کند و سرعت ماکزیمم روی محور مرکزی لوله ۳ m/s است. اگر جت آبی با سرعت ۰.۵ m/s و با قطر ۲ سانتی متر به لوله اصلی وارد شود، با فرض توزیع یکنواخت سرعت در قسمت افقی بعد از خم، چقدر است؟ $(\pi = 3)$



برای قسمت افقی لوله می توان نوشت:

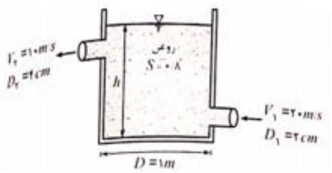


$$Q_{in_1} = \text{حجم پروفیل سرعت (مخروط)} = \frac{1}{3}\pi \times 0.05^2 \times 3 = 7.5\times10^{-3}\ m^3/s$$

$$Q_{in_2} = V_2 A_2 = (0.5)\left(\frac{\pi \times 0.02^2}{4}\right) = 0.15\times10^{-3}\ m^3/s$$

$$7.5\times10^{-3} + 0.15\times10^{-3} = V\left(\frac{\pi \times 0.1^2}{4}\right) \Rightarrow V = 1.02\ m/s$$

تمرین۸- در شکل مقابل روغن با سرعت ۲۰ m/s از لوله ۱ وارد و با سرعت ۱۰ m/s از لوله ۲ خارج می شود. تغییرات بر حسب زمان را محاسبه کنید.



بر اساس اصل بقای جرم داریم:

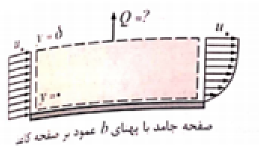
$$(\sum \rho Q)_{in} - (\sum \rho Q)_{out} = \rho Q \quad \text{و} \quad \rho = 0.8\times1000 = 800\ kg/m^3$$

$$\Rightarrow (800)(20)\left(\frac{\pi \times 0.02^2}{4}\right) - (800)(10)\left(\frac{\pi \times 0.04^2}{4}\right) = (800)\left(\frac{dh}{dt}\right)\left(\frac{\pi \times 1^2}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dh}{dt}\right) = -8\times10^{-3}\ m/s$$

چون تغییرات ارتفاع نسبت به زمان منفی است می توان نتیجه گرفت که ارتفاع در حال کاهش می باشد.

تمرین۹- سیال تراکم ناپذیری از روی یک صفحه غیرقابل نفوذ عبور می کند، به طوری که جریان ورودی آن توزیع یکنواخت و خروجی آن توزیع سهمی شکل دارد. سهمی خروجی در $y = \delta$ بیشترین مقدار را دارد. دبی حجمی عبورکننده از سطح بالایی جم کنترل چقدر است؟



ابتدا دبی جریان خروجی با پروفیل سرعت سهمی را محاسبه می کنیم:

$$y = au^2 \Rightarrow a = \frac{y}{u^2} = \frac{\delta}{u_0^2} \Rightarrow u = \frac{u_0}{\sqrt{\delta}} y^{\frac{1}{2}}$$

$$Q = \int_A u\, dA = \int_0^{\delta} \frac{u_0}{\sqrt{\delta}} y^{\frac{1}{2}} b\, dy = \frac{2}{3} u_0\, \delta b$$

$$\sum Q_{(in)} = \sum Q_{(out)} \Rightarrow u_0 \delta b + Q = \frac{2}{3} u_0 \delta b \Rightarrow Q = \frac{1}{3} u_0 \delta b$$